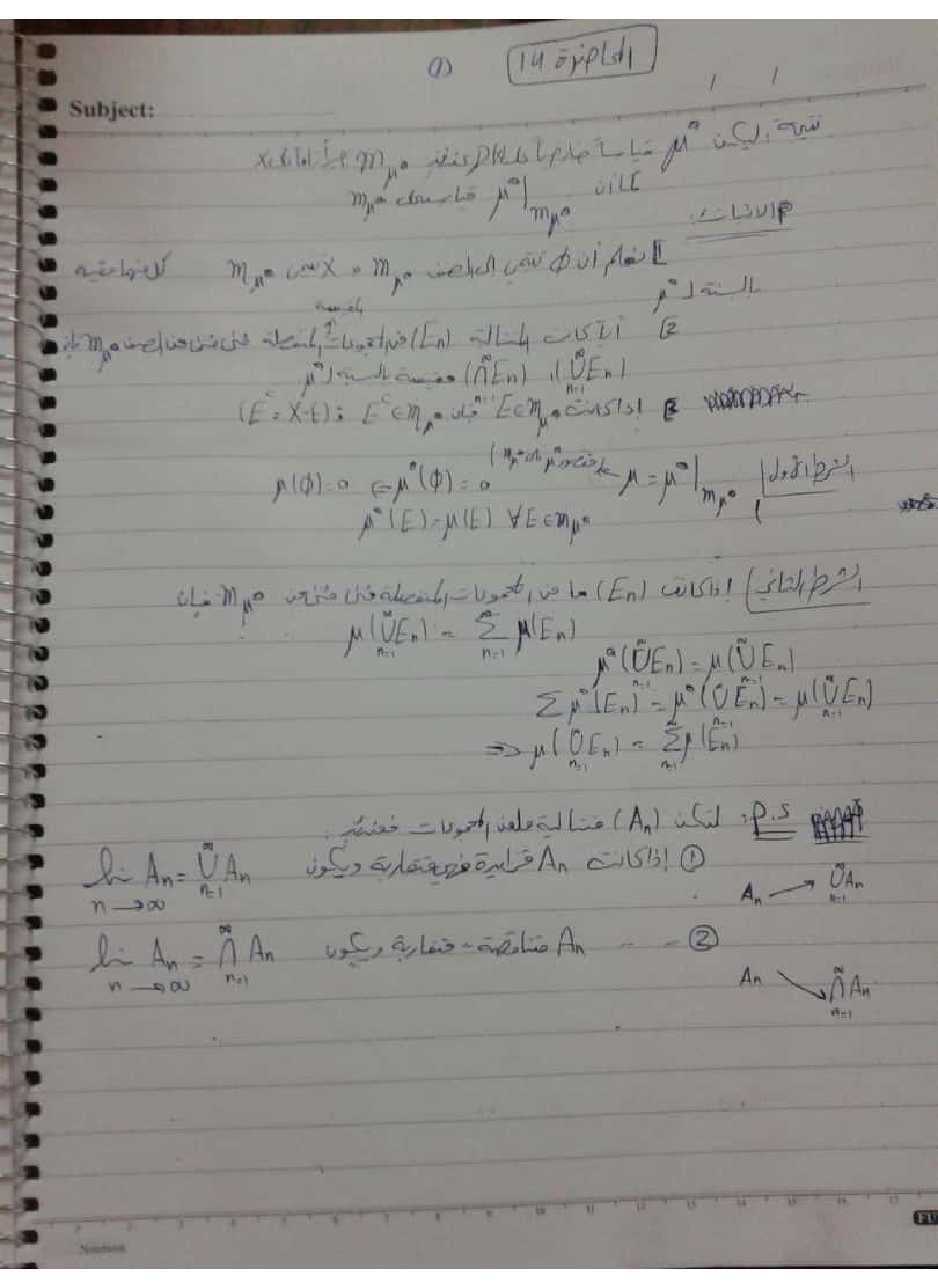


Subject:

نظرية: ليكن μ^* قياساً خارجياً على X ولتكن $\mathfrak{M}_{\mu^*}$ عائلة X
فإن $\mu^*|_{\mathfrak{M}_{\mu^*}}$ قياس على $\mathfrak{M}_{\mu^*}$

الإثبات:

1 نعلم أن ϕ تحقق الخاصية $\mathfrak{M}_{\mu^*}$ ، X تحقق $\mathfrak{M}_{\mu^*}$ كل عائلة بالنسبة لـ μ^*

2 إذا كانت متتالية (E_n) من المجموعات المنفصلة في $\mathfrak{M}_{\mu^*}$ فإن $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ ، $(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n)$ قيوسة بالنسبة لـ μ^*

3 إذا كانت $E \in \mathfrak{M}_{\mu^*}$ فإن $E^c \in \mathfrak{M}_{\mu^*}$; $(E^c = X - E)$

الشرط الأول: $\mu = \mu^*|_{\mathfrak{M}_{\mu^*}}$ (نعرف μ^* على $\mathfrak{M}_{\mu^*}$)

$$\mu^*(\phi) = 0 \Rightarrow \mu(\phi) = 0$$

$$\mu^*(E) = \mu(E) \ \forall E \in \mathfrak{M}_{\mu^*}$$

الشرط الثاني: إذا كانت (E_n) متتالية من المجموعات المنفصلة في $\mathfrak{M}_{\mu^*}$ فإن

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$$

$$\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right)$$

$$\sum \mu^*(E_n) = \mu^*\left(\bigcup E_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right)$$

$$\Rightarrow \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$$

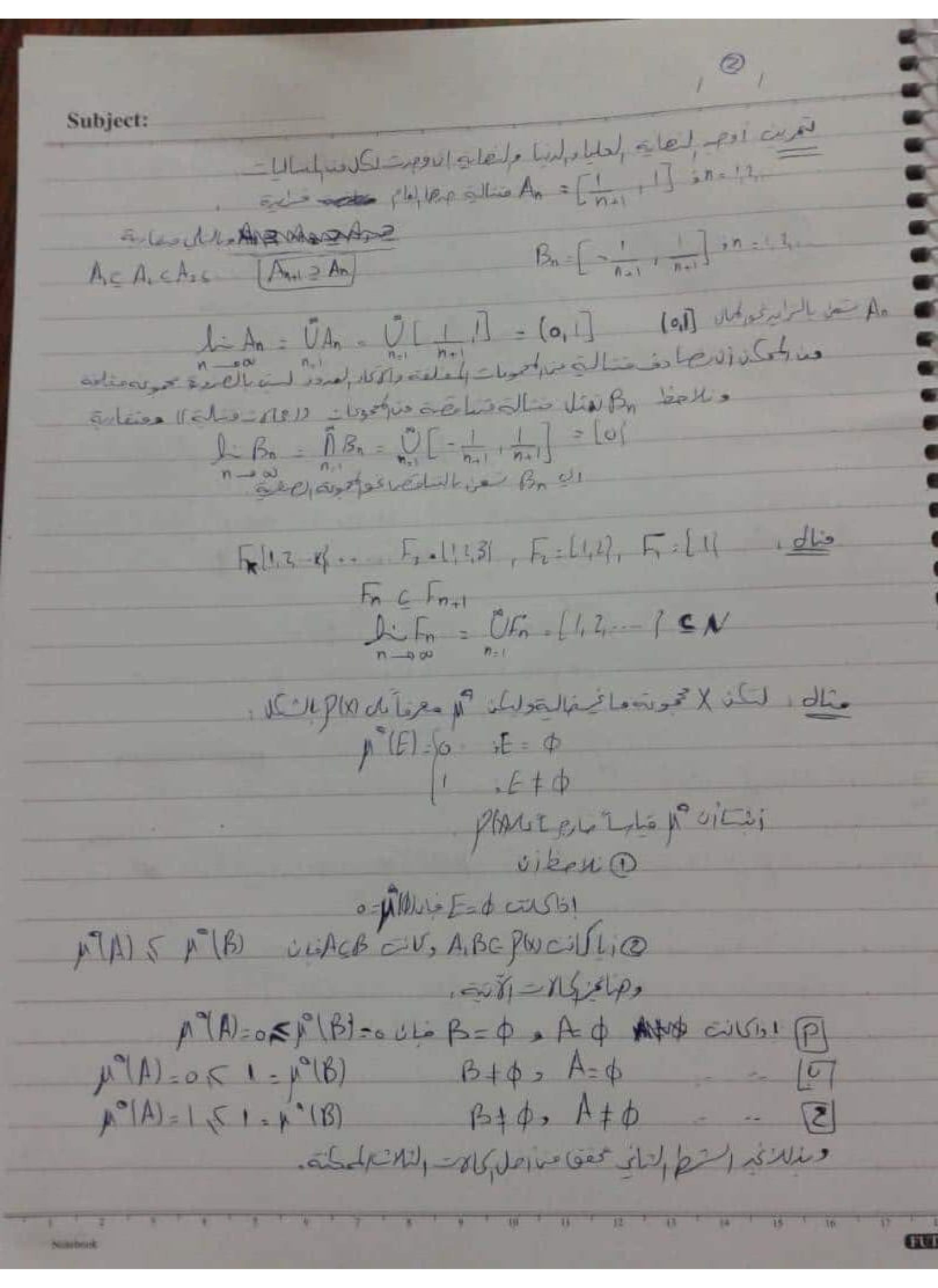
P.S: لتكن (A_n) متتالية من المجموعات غير منتهية.

① إذا كانت A_n متزايدة ومتقاربة ويكون $\lim_{n \to \infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$

$A_n \nearrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$

② إذا كانت A_n متناقصة ومتقاربة ويكون $\lim_{n \to \infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$

$A_n \searrow \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$



Subject:

تمرين: اوجد النهاية العليا والدنيا والنهاية ان وجدت لكل من المتتاليات

$A_n = \left[\frac{1}{n+1}, 1\right]$; $n = 1, 2, \ldots$ متتالية من المجموعات ... متزايدة

مجموعة ... متزايدة

$A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3$ $\boxed{A_{n+1} \supseteq A_n}$

$B_n = \left[-\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+1}\right]$; $n = 1, 2, \ldots$

A_n تسعى بالتزايد نحو المجموعة $[0,1]$

$$\lim_{n \to \infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n+1}, 1\right] = (0, 1]$$

من الممكن ان نصادف متتالية من المجموعات المغلقة ولكن النهاية ليست بالضرورة مجموعة مغلقة

ونلاحظ B_n تمثل متتالية متناقصة من المجموعات (الفترات المغلقة) متقاربة

$$\lim_{n \to \infty} B_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[-\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+1}\right] = \{0\}$$

اي B_n تسعى بالتناقص نحو المجموعة الصفرية

مثال: $F_1 = \{1\}$, $F_2 = \{1, 2\}$, $F_3 = \{1, 2, 3\}$ ... $F_k = \{1, 2, \ldots, k\}$

$F_n \subseteq F_{n+1}$

$$\lim_{n \to \infty} F_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = \{1, 2, \ldots\} \subseteq N$$

مثال: لتكن X مجموعة ما غير خالية ولتكن μ^* معرفة على $P(X)$ بالشكل:

$$\mu^*(E) = \begin{cases} 0 & ; E = \phi \\ 1 & ; E \neq \phi \end{cases}$$

نثبت ان μ^* قياس خارجي على $P(X)$

① نلاحظ ان

اذا كانت $E = \phi$ فان $\mu^*(\phi) = 0$

② اذا كانت $A, B \subseteq P(X)$ وكانت $A \subseteq B$ فان $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$

ونميز الحالات الآتية:

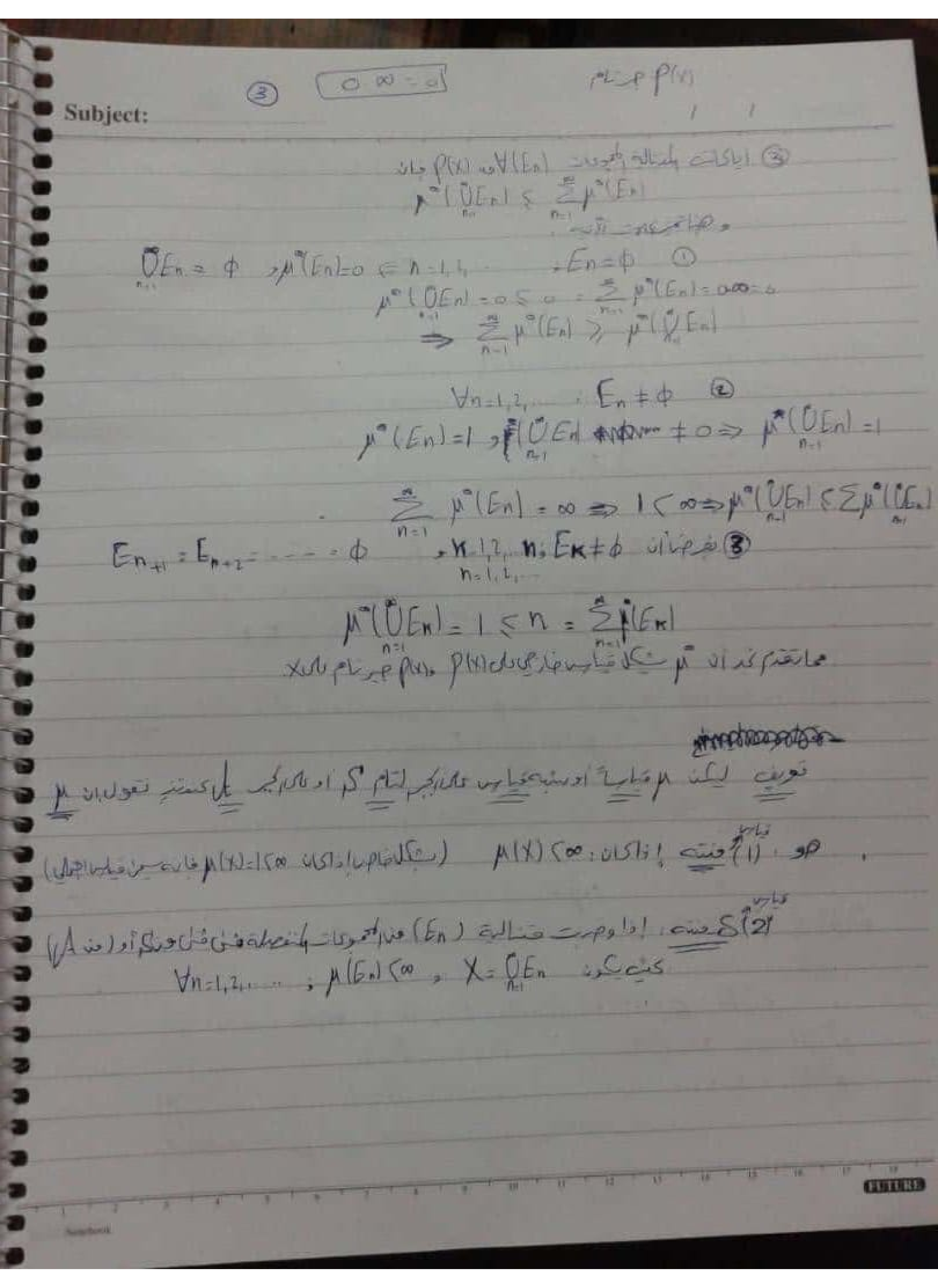
أ) اذا كانت $A = \phi$ و $B = \phi$ فان $\mu^*(A) = 0 \leq \mu^*(B) = 0$

ب) .. .. $A = \phi$, $B \neq \phi$ $\mu^*(A) = 0 \leq 1 = \mu^*(B)$

ج) .. .. $A \neq \phi$, $B \neq \phi$ $\mu^*(A) = 1 \leq 1 = \mu^*(B)$

وبذلك الشرط الثاني تحقق من اجل الحالات الثلاث الممكنة.

Notebook



Subject: ③ $\boxed{0\cdot\infty = 0}$ μ^* على $P(X)$

③ إثبات الجمعية المتتالية للمجموعات $\forall (E_n)$ في $P(X)$ فإن

$$\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n)$$

وهنا نميز ثلاث حالات

① $E_n = \phi$ ، $n = 1, 2, \ldots \Leftarrow \mu^*(E_n) = 0$ و $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = \phi$

$$\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = 0 \leq 0 = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n) = 0\cdot\infty = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n) \geq \mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right)$$

② $E_n \neq \phi$ ، $\forall n = 1, 2, \ldots$

$$\mu^*(E_n) = 1 \text{ و } \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \neq 0 \Rightarrow \mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = 1$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n) = \infty \Rightarrow 1 < \infty \Rightarrow \mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \leq \sum \mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right)$$

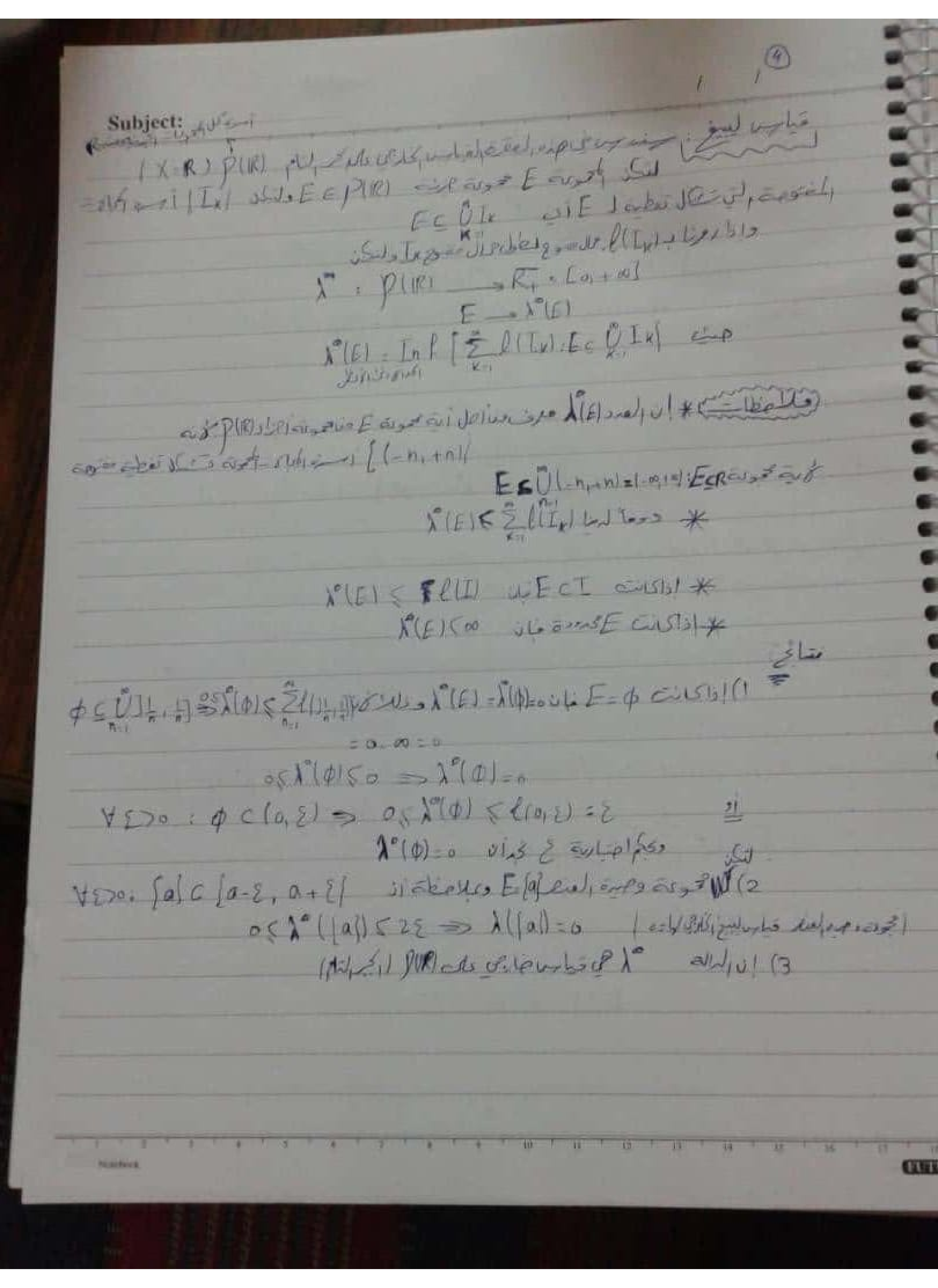
③ نفرض أن $E_k \neq \phi$ ، $k = 1, 2, \ldots, n$ و $E_{n+1} = E_{n+2} = \cdots = \phi$ ، $n = 1, 2, \ldots$

$$\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = 1 \leq n = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_k)$$

مما تقدم نجد أن μ^* شكل قياساً خارجياً على $P(X)$ و $P(X)$ غير تام على X.

تعريف: ليكن μ قياساً أو شبه قياس على الجبر التام $\mathcal{A}$ أو على الجبر $\mathcal{A}$ على X عندئذ نقول إن μ هو: (1) منتهٍ (قياس) إذا كان $\mu(X) < \infty$ (بشكل عام إذا كان $\mu(X) = 1 < \infty$ فإنه يسمى قياساً احتمالياً)

(2) σ منتهٍ (قياس): إذا وجدت متتالية (E_n) من المجموعات المنفصلة في $\mathcal{A}$ أو في $\mathcal{A}$ بحيث يكون $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ ، $\mu(E_n) < \infty$ ؛ $\forall n = 1, 2, \ldots$



(4)

Subject: ...

قياس ليبغ الخارجي

سنعرف قياس على مجموعة المجموعات الجزئية ... $(X = \mathbb{R})$ $P(\mathbb{R})$ ...

لتكن المجموعة E مجموعة جزئية $E \in P(\mathbb{R})$ ولتكن $\{I_k\}$ أسرة من المجالات المفتوحة التي تشكل تغطية لـ E أي $E \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$

وإذا رمزنا بـ $l(I_k)$ لطول المجال I_k ولتكن

$$\lambda^* : P(\mathbb{R}) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+ = [0, +\infty]$$

$$E \longmapsto \lambda^*(E)$$

حيث

$$\lambda^*(E) = \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} l(I_k) : E \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k \right\}$$

الحد الأدنى

ملاحظات:

* إن العدد $\lambda^*(E)$ معرف من أجل أية مجموعة E من مجموعة الأجزاء $P(\mathbb{R})$ لأنه يوجد دوماً الأسرة $\{(-n, +n)\}$ من المجالات التي تشكل تغطية مفتوحة لأية مجموعة $E \subseteq \mathbb{R}$: $E \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} (-n, +n) = (-\infty, +\infty)$

* دوماً لدينا $\lambda^*(E) \le \sum_{k=1}^{\infty} l(I_k)$

* إذا كانت $E \subset I$ فإن $\lambda^*(E) \le l(I)$

* إذا كانت E محدودة فإن $\lambda^*(E) < \infty$

نتائج

1) إذا كانت $E = \phi$ فإن $\lambda^*(E) = \lambda^*(\phi) = 0$ وذلك لأن $\phi \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty}]\frac{1}{n}, \frac{1}{n}[\Rightarrow 0 \le \lambda^*(\phi) \le \sum_{n=1}^{\infty} l(]\frac{1}{n}, \frac{1}{n}[)$

$= 0 \cdot \infty = 0$

$$0 \le \lambda^*(\phi) \le 0 \Rightarrow \lambda^*(\phi) = 0$$

أو

$$\forall \varepsilon > 0 : \phi \subset (0, \varepsilon) \Rightarrow 0 \le \lambda^*(\phi) \le l(0, \varepsilon) = \varepsilon$$

وبحكم اختيارية ε نجد أن $\lambda^*(\phi) = 0$

2) لكل مجموعة وحيدة العنصر $E = \{a\}$ وبملاحظة أن $\forall \varepsilon > 0 : \{a\} \subset]a - \varepsilon, a + \varepsilon[$

$0 \le \lambda^*(\{a\}) \le 2\varepsilon \Rightarrow \lambda(\{a\}) = 0$ | المجموعة وحيدة العنصر قياسها ليبغ الخارجي يساوي الصفر

3) إن الدالة λ^* هي تطبيق مجموعاتي على $P(\mathbb{R})$ (الجبر التام)

تعريف: ليكن λ^* قياساً خارجياً على مجموعة $\mathbb{R}$ لتكن $P(\mathbb{R})$ نقول ان المجموعة $E \in P(\mathbb{R})$ انها مقيسة بالنسبة λ^* اذا تحققت الشرط

$$\lambda^*(A) = \lambda^*(A \cap E) + \lambda^*(A \cap E^c)$$

$$\lambda^*(A) \geq \lambda^*(A \cap E) + \lambda^*(A \cap E^c) \quad \forall A \in P(\mathbb{R})$$

ودائماً تحقق $\lambda^*(A) \leq \lambda^*(A \cap E) + \lambda^*(A \cap E^c)$

$$A = (A \cap \mathbb{R}) = [A \cap (E \cup E^c)] = (A \cap E) \cup (A \cap E^c)$$

$$\lambda^*(A) \leq \lambda^*(A \cap E) + \lambda^*(A \cap E^c) \ ; \ \forall A \in P(\mathbb{R})$$

P.S: نعرف الصف المجموعات المقيسة بالنسبة لـ λ^* بـ $\mathcal{M}_{\lambda^*} = \mathcal{L}$ صف ليبيغ

وهذا الصف يشكل جبر تام على $\mathbb{R}$ او من $P(\mathbb{R})$

اذاً ان $\lambda = \lambda^*|_{\mathcal{L}}$ ان λ هو مقصور λ^* على الصف $\mathcal{L}$ وهو يعرف قياساً على الجبر التام $\mathcal{L}$

تعريف: يسمى القياس λ المعرف على الجبر التام $\mathcal{L}$ بقياس ليبيغ في $\mathbb{R}$ وكل مجموعة $E \in \mathcal{L}$ تسمى مجموعة مقيسة (الخارجية) لوتيماً او حسب ليبيغ و $\lambda(E)$ قياس حسب ليبيغ

$\lambda(E)$ قياس ليبيغ لـ E

مبرهنة: اذا كانت E مجموعة قابلة للعد على الاكثر فهي مقيسة حسب ليبيغ أي $E \in \mathcal{L}$ وقياس ليبيغ لها معدوم $\lambda(E) = 0$

البرهان: نميز حالتين. الأولى اذا كانت E منتهية أي $E = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ وعدد عناصرها n

وبالتالي يكون $E = \bigcup_{k=1}^{n} \{a_k\}$

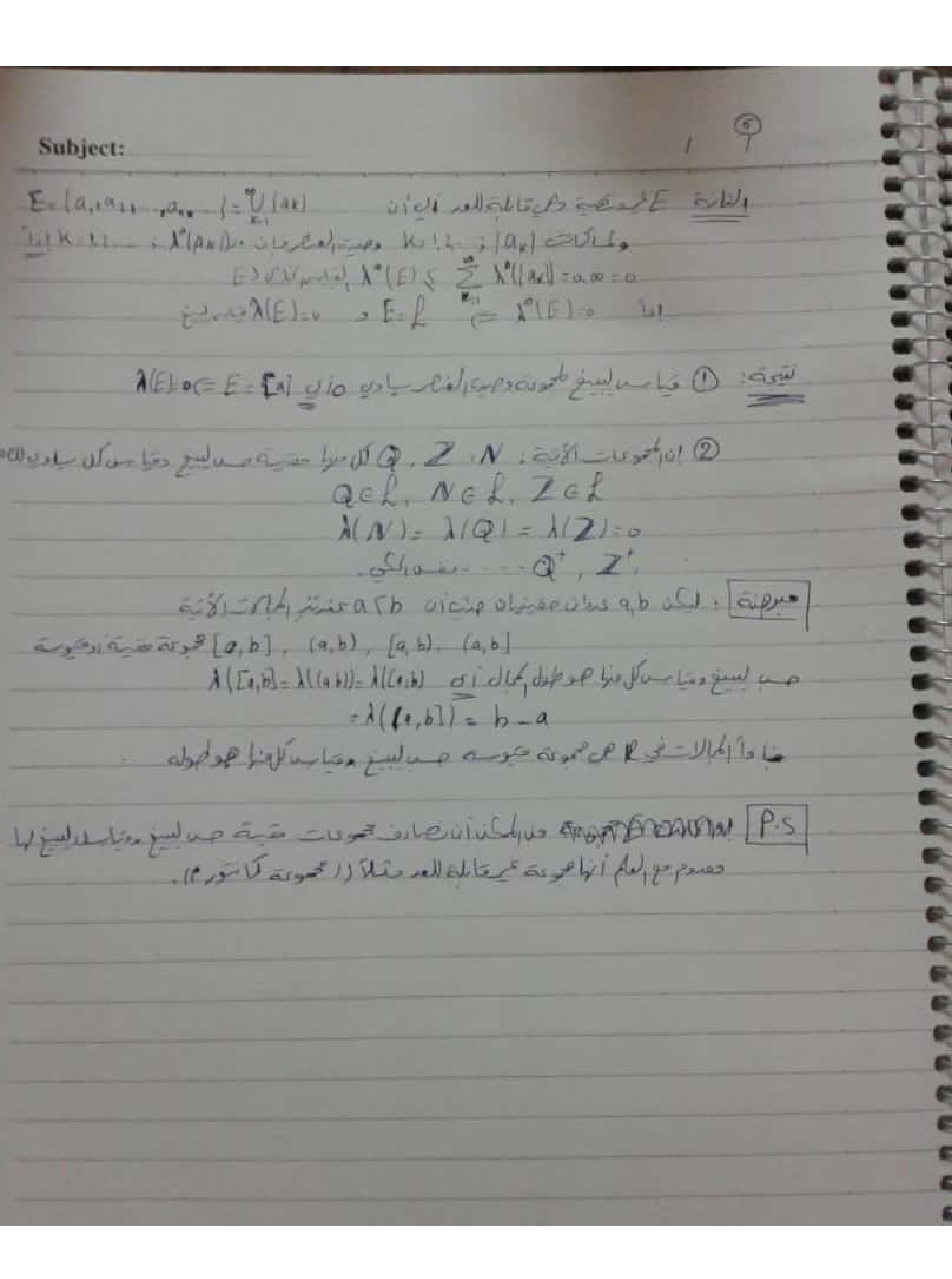
$$0 \leq \lambda^*(E) \leq \sum_{k=1}^{n} \lambda^*(\{a_k\}) = 0 \cdot n = 0$$

لأن قياسها = 0

$$0 \leq \lambda^*(E) \leq 0 \Rightarrow \lambda^*(E) = 0 \Rightarrow$$ قابلة للقياس بالنسبة لـ λ^*

وبالتالي قياسها الخارجي يطابق قياس ليبيغ

$$\lambda(E) = \lambda^*(E) \ ; \ \forall E \in \mathcal{L}$$



الحالة E مجموعة قابلة للعد أي أن $E=\{a_1,a_2,\dots,a_n,\dots\}=\bigcup_{k=1}^{\infty}\{a_k\}$

وبما أن $\{a_k\}$; $k=1,2,\dots$ مجموعات أحادية العنصر $\lambda^*(\{a_k\})=0$; $k=1,2,\dots$ إذا

$\lambda^*(E)\le\sum_{k=1}^{\infty}\lambda^*(\{a_k\})=0\cdot\infty=0$ القياس الخارجي لـ E

إذا $\lambda^*(E)=0 \Rightarrow E\in\mathcal{L}$ و $\lambda(E)=0$ قياس ليبيغ

نتيجة: ① قياس ليبيغ لمجموعة وحيدة العنصر يساوي صفر أي $E=\{a\}\Rightarrow\lambda(E)=0$

② إن المجموعات الآتية: N ، Z ، Q كل منها مقيسة حسب ليبيغ وقياس كل منها يساوي الصفر

$$Q\in\mathcal{L},\ N\in\mathcal{L},\ Z\in\mathcal{L}$$

$$\lambda(N)=\lambda(Q)=\lambda(Z)=0$$

Q^+ , Z^+ ... نفس الشيء.

مبرهنة: ليكن a,b عددان حقيقيان حيث أن $a<b$ نعتبر المجالات الآتية $[a,b]$, (a,b) , $[a,b)$, $(a,b]$ مجموعة مقيسة ومحدودة حسب ليبيغ وقياس كل منها هو طول المجال أي أن

$$\lambda([a,b])=\lambda((a,b))=\lambda((a,b])=\lambda([a,b))=b-a$$

فإذا المجالات في R هي مجموعة مقيسة حسب ليبيغ وقياس كل منها هو طوله.

P.S من الممكن أن نصادف مجموعات مقيسة حسب ليبيغ وقياس ليبيغ لها معدوم مع العلم أنها مجموعة غير قابلة للعد مثلاً ((مجموعة كانتور)).